Lista 0: Fale mechaniczne

Zadanie 1. Jednorodna, doskonale sprężysta struna o gęstości liniowej λ, została naciągnięta tak, że jej naprężenie wynosi F_o. Wyprowadź równanie falowe opisujące poprzeczne wychylenie struny i znajdź prędkość rozchodzenia się zaburzeń wzdłuż strony. Zakładamy, że (1) dla wszystkich punktów i w dowolnej chwili czasu $\partial y/\partial x \ll 1$, (2) składowa naprężenia w kierunku poprzecznym względem struny jest bliska $F_o\,(\partial y/\partial x)$, (3) rozważmy jedynie drgania odbywające się w pewnej płaszczyźnie.

Zadanie 2. Wykaż, że rozwiązanie $y(x,t) = A_o e^{i(\omega t - kx)}$ spełnia równanie falowe

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

przy założeniu, że ω i k związane są zależnościa $\omega = vk$.

Zadanie 3. Zależność wychylenia źródła drgań z położenia równowagi jest w postaci $y(t) = 10\cos(\pi t/4)$ (przy czym $y(t)$ wyznaczamy w (cm)) i jest to źródło zaburzenia rozchodzącego się w postaci fali harmonicznej. Wiadomo, że fala rozchodzi się z prędkością o wartości $v = 0,5$ cm/s. (a) Wykaż, że $y(x,t) = 10\cos(\pi t/4 - \pi x/2)$, przy czym x - oznacza współrzędną położenia określoną w (cm). (b) Wyznacz amplitudę, okres fali, długość fali, wartość liczby falowej. (c) Wyznacz wartość wychylenia cząstki znajdującej się w położeniu $x_o = 1$ cm w chwili $t_o = 2$ s oraz oblicz wartość jej prędkości i przyspieszenia.

Zadanie 4. Rozważ superpozycję dwóch fal biegnących $y_1(x,t) = A\cos[(\omega_{sr} + \Delta\omega)t - (k_{sr} + \Delta k)x]$ oraz $y_2(x,t) = A\cos[(\omega_{sr} - \Delta\omega)t - (k_{sr} - \Delta k)x]$, przy czym $\omega_{sr} = (\omega_1 + \omega_2)/2$, $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$, $k_{sr} = (k_1 + k_2)/2$ i $\Delta k = (k_1 - k_2)/2$. (a) Zapisz wyrażenie przedstawiające wynik sumowania tych dwóch fal biegnących. (b) Oblicz z jaką wartością prędkości porusza się grzbiet modulowanej fali – prędkość grupową fali v_g. Przyjmij, że $\Delta\omega \ll \omega_{sr}$. (c) Wykaż, że w przypadku fal dla których związek dyspersyjny ma postać $\omega = v_f \cdot k$, przy czym v_f– prędkość fazowa fali, można zapisać następującą relację

$$v_g = v_f - \lambda \cdot \frac{dv_f}{d\lambda}.$$

(d) Wiadomo, że prędkość fazowa fal o długości λ, rozchodzących się na powierzchni wody, przy pominięciu napięcia powierzchniowego i efektów związanych ze skończoną głębokością wody, wyraża się wzorem

$$v_f = \sqrt{g\lambda/2\pi}.$$

Wykaż, że prędkość grupowa tej fali równa jest połowie jej prędkości fazowej. Oblicz prędkość grupową i fazową fali o długości 1 km. Przyjmij, g=9,81 m/s^2.

Zadanie 5. Dwie identyczne fale harmoniczne, poruszające się w tym samym kierunku wzdłuż napiętej liny, interferują ze sobą. Amplituda każdej z fal równa jest $1,0$ cm, a różnica faz między nimi wynosi 80^o. (a) Wyznacz amplitudę fali wypadkowej, powstającej w wyniku interferencji obu fal i określ charakter interferencji. (b) Wyznacz różnicę faz (w radianach i za pomocą długości fali), przy której amplituda fali wypadkowej jest równa $0,5$ cm.

Zadanie 6. Rozważmy strunę o długości $L = 2$ m, zamocowaną z dwóch stron i poddaną takiemu naprężeniu, że wzdłuż niej biegnie fala z prędkością równą $v = 50$ cm/s. Struna ma stałą liniową gęstość masy $\lambda = 0,006$ kg/m. (a) Oblicz naprężenie jakiemu poddana jest struna. (b) Wyznacz częstotliwości rezonansowe odpowiadające trzem pierwszym modom.

Zadanie 7. Długi pociąg towarowy, ciągnięty przez lokomotywę, jedzie pod górę z prędkością 5 m/s, po prostych szynach. Gdy pociąg zbliża się do tunelu, wykutego w pionowej ścianie, maszynista wysyła sygnał o częstotliwości 340 Hz. Zarówno dźwięk syreny, jak i jej echo, po odbiciu od pionowej ściany są słyszane (a) przez maszynistę, (b) przez stojącego na ziemi człowieka, koło którego przejeżdża lokomotywa. Jaki są to częstotliwości?